# SEPARABLEでないスペクトルをもつMINIMAL複素指数関数系について (バナッハ空間及び関数空間論における幾何学的構造の研究とその応用)



中村, 昭宏

数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 14-21



# SEPARABLE でないスペクトルをもつ MINIMAL 複素指数関数系について

東海大学開発工学部　中村 昭宏 (Akihiro Nakamura)
Department of Mathematics
Tokai University

ABSTRACT. 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が basis ならば複素数列 $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ (以後, スペクトルと呼ぶ) は separable であるという性質, $\inf_{n\neq m}|\lambda_n - \lambda_m| > 0$ を持つ. この性質は basis であるという条件を "uniformly minimal" という性質まで弱めても, 持つことが知られている. 本ノートでは, separable でないスペクトル $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ をもつ minimal 複素指数関数系の例を述べる.

## 1. INTRODUCTION

まず, ここで扱う点列の定義を述べる. ヒルベルト空間 $H$ における相異なる点列 $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$ は, それらによって生成される線形部分空間が $H$ において dense ならば *complete* in $H$ であるという. このことを $\overline{\text{span}}\{x_n\} = H$ と表す. また, $\{x_n\}$ のどの要素も他のものによって生成される部分空間の閉包に属さないならば, $\{x_n\}$ は *minimal* であるという. このことは各 $k$ に対して, $M_k = \overline{\text{span}}\{x_n\}_{n\neq k}$ とおくと,

$$d_k = \text{dist}\,(x_k, M_k) = \inf_{x\in M_k} \|x_k - x\| > 0$$

となることを意味する. 次に, この minimal という性質を強めたものに *uniformly minimal* というものがある. これは正の定数 $\delta$ が存在して, 各 $k$ に対して

$$d_k \geq \delta \|x_k\|$$

が成り立つことを意味する.

$\{x_n\}$ が complete であり, かつ正の定数 $A, B > 0$ が存在して, 任意の有限数列 $\{c_n\}$ に対して

$$A \sum |c_n|^2 \leq \left\|\sum c_n x_n\right\|^2 \leq B \sum |c_n|^2$$

が成り立つならば, $\{x_n\}$ は *Riesz basis* for $H$ であるという. 定数 $A, B$ に特に呼び名はないが, 本ノートでは *Riesz bounds* と呼ぶことにする. 定義の中で, $H$ を $\overline{\text{span}}\{x_n\}$ に置き換えるならば $\{x_n\}$ を *Riesz sequence* であるという[1]. $\{x_n\}$ が basis

[1] *2000 Mathematical Subject Classification*: 42C15, 42C30, 42C99.
*keywords*: Riesz basis, minimal, unifromly minimal, separable.

ならば uniformly minimal であることもよく知られている (see [9, Theorem 3.1]).
minimal, uniformly minimal な点列について, 以下の事実はよく知られている.

**Proposition A (see Singer [9, Theorem 6.1]).**

$\{x_n\}$ が *minimal* であるための必要十分条件は座標関数と呼ばれる点列 $\{f_n\} \subset H$ が存在して, $(x_n, f_m) = \delta_{nm}$ が成り立つことである.

複素数列 $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は, もし

$$\inf_{n\neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0$$

を満たすならば, *separable* であるといわれる. このとき, $\mathbf{\Lambda} \in$SP と表す. 本ノートにおいて, 我々はヒルベルト空間として $H = L^2[-\pi, \pi]$ を, そして $\sup_n |\mathrm{Im}\ \lambda_n| < \infty$, $\lambda_n \neq \lambda_m$, $n \neq m$ を満たす複素数列 $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して, $\{x_n\} = \{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を考える. 数列 $\mathbf{\Lambda}$ は $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関するスペクトルと呼ばれる. ノルムについては, $f \in L^2[-\pi, \pi]$ のとき,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

とする. この設定において, uniformly minimal について以下のことが成り立つ.

**Proposition B (see Sedletskii [8, p.3569]).**

$\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete in $L^2[-\pi, \pi]$ であるとすると, 次の同値関係が成り立つ.

(i) $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が *uniformly minimal* である.

(ii) $\inf_k d_k = \inf_k \mathrm{dist}\left(e^{i\lambda_k t}, M_k\right) > 0$, $M_k = \overline{\mathrm{span}}\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\neq k}$.

(iii) $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の座標関数と呼ばれる点列 $\{f_n\} \subset H$ で, $\left(e^{i\lambda_n t}, f_m\right) = \delta_{nm}$ かつ $\sup_n \|f_n\| < \infty$ を満たすものが存在する.

ここで, (i) と (ii) が同値であることを導くときに, $\sup_n |\mathrm{Im}\ \lambda_n| < \infty$ の仮定が必要となる.

次に, "excess" と呼ばれる概念を導入する. これは Paley-Wiener によって定義された. 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ から, $N$ 個の項を取り除いたとき, complete 性は失われずに minimal となるならば, それは *excess* $N$ を持つといい,

$$E(\mathbf{\Lambda}) = N$$

と表す. 逆に, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に $N$ 個の項

$$e^{i\mu_1 t}, \cdots, e^{i\mu_N t}$$

を付け加えると, complete かつ minimal となるならば

$$E(\mathbf{\Lambda}) = -N$$

と表す. 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が minimal または complete であることは excess を用いると以下のようにまとめられる：

- $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が minimal であるための必要十分条件は $E(\mathbf{\Lambda}) \leq 0$.
- $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete かつ minimal であるための必要十分条件は $E(\mathbf{\Lambda}) = 0$.

便宜上, 任意有限個の項を取り除いても complete 性が失われない場合は, $E(\mathbf{\Lambda}) = \infty$ であると考え, また任意有限個の項を付け加えても complete にならない場合は, $E(\mathbf{\Lambda}) = -\infty$ であると考える.

## 2. Sedletskii の例

複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の持つ性質について, 以下のように記号を定める. ここで, 単なる "basis" とは, Riesz basis の定義における無条件収束の仮定をはずしたものをさす.

$$\text{RB} = \text{Riesz basis}, \ \text{B} = \text{basis}.$$

$$\text{CM} = \text{complete かつ minimal}.$$

$$\text{CUM} = \text{complete かつ uniformly minimal}.$$

$$\text{CSP} = \text{complete かつ} \mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \text{SP}.$$

すぐにわかることもあるが, 次の関係が成り立つ：

$$\text{RB} \longrightarrow \text{B} \longrightarrow \text{CUM} \longrightarrow \text{CM}.$$

$$\text{UM} \longrightarrow \text{SP}.$$

これらの関係の逆は, "B $\longrightarrow$ RB" が未知である他は全て成り立たないことが知られている. なお, 昨年の報告集の中で, M $\longrightarrow$ SP と書いてあるが, それは誤りであり, 上記のように, UM の仮定が必要であることがわかった. 訂正し, 改めて本報告でその反例を挙げる. 以下の結果は, Sedletskii [7, §1] に, "uniformly minimal" ではなく, "minimal" と書かれてあるが, ミスプリであると考えられる. 後に, Sedletskii [8, p.3569] では, uniformly minimal として証明が書かれてある. ここでは, テイラー展開を用いて証明した.

**Proposition 2.1.** $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ がUM ならばスペクトル $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $\in$SP である.

ここで, これまで知られている複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の minimal, uniformly minimal な例をいくつか挙げる. まず, 昨年の報告集でも触れた次の結果がある.

**Theorem A (Schwarz, 1943; see Alexander and Redheffer [1, p.61, Remark 4]).**

$\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が *complete* でないならば *minimal* になる.

この結果は複素指数関数系特有の結果である. 複素指数関数系でないと簡単に反例が作れる.

**Example 2.1.** $\{e^{it}+e^{i2t},\ e^{it},\ e^{i2t},\ e^{i3t},\dots,e^{int},\dots\}$ は, $L^2[-\pi,\pi]$ において, 明らかに *complete* でないが, *minimal* でもない.

Levinson は [3, Theorem V] で以下の結果を得た.

**Theorem B ([3, Theorem V]; see [11, p.101]).**

任意の正の定数 $\varepsilon$ に対して,

$$\lambda_n = \begin{cases} n+\frac{1}{4}+\varepsilon, & n>0, \\ 0, & n=0, \\ n-\frac{1}{4}-\varepsilon, & n<0, \end{cases} \tag{2.1}$$

とすると, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2[-\pi,\pi]$ において *complete* でない.

従って, Theorem A と併せて, Theorem B における $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2[-\pi,\pi]$ において minimal であることがわかる. さらに, Sedletskii はこれらが uniformly minimal であることを示した (see [8, p.3569]).

Theorem B に関連して, $\varepsilon=0$ の場合は, Riesz basis でない basis の例ではないかと, 特に注目されたが, Young [10] によって basis でないことが示された. また, この場合は complete かつ minimal であり, その座標関数も Redheffer and Young [6] で求められた. 彼らはさらに [6] の中で, その座標関数のノルムが一様有界であることを示した. 従って, Proposition B より, $\varepsilon=0$ の場合も uniformly minimal であることがわかる.

**Theorem C ([6, Theorem 5]).**

$$\lambda_n = \begin{cases} n+\frac{1}{4}, & n>0, \\ 0, & n=0, \\ n-\frac{1}{4}, & n<0, \end{cases} \tag{2.2}$$

とすると, $L^2[-\pi,\pi]$ において, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対する座標関数 $\{f_n\}$ は, $\sup_n \|f_n\|<\infty$ を満たす.

これまでの例は全て, uniformly minimal で, $\mathbf{\Lambda}$ $\in$SP である. 結局, Kadec's 1/4-theorem と併せると, $0 < \alpha < 1$ のとき,

$$\lambda_n = \begin{cases} n+\alpha, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n-\alpha, & n < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

とすると, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は必ず uniformly minimal となることがわかる. ついでながら, (2.3) で与えられるスペクトルについて, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2[-\pi,\pi]$ の basis となるならば, 必ず Riesz basis となることが [4] で示された. また, より一般のスペクトル $\mathbf{\Lambda}$ に関する excess $E(\mathbf{\Lambda})$ についての結果が, [2] で求められている.

さて, 実数 $\alpha$ に対して, 次の $L^2[-\pi,\pi]$ 上の isometric isomorphism

$$\phi(t) \longmapsto e^{i\alpha t}\phi(t)$$

を考える. この isomorphism を (2.2) によって与えられるスペクトル $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関する $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に施すと, スペクトル

$$\lambda_n^{(1)} = \begin{cases} n-\frac{1}{4}, & n > 0, \\ n+\frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

に関する複素指数関数系も uniformly minimal であることがわかる. さらに, この複素指数関数系に上記の isomorphism を施せば

$$\lambda_n^{(2)} = \begin{cases} n-\dfrac{1}{2}, & n > 0, \\ n, & n < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

に関する複素指数関数系も uniformly minimal であることもわかる.

さて, Sedletskii [7] は以下の例を構成した.

**Theorem D ([7, Theorem 3]).**

*Let $V$ be the sequence of all integers in the intervals*

$$I_s = [2^s, 2^s + [\log s]], \quad s \geq 3.$$

*Let*

$$\mathbf{\Lambda} = (n : n < 0,\ n \in V) \cup \left(n - \frac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\backslash V\right).$$

*Then $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbf{\Lambda}}$ is complete and minimal, but not uniformly minimal in $L^2[-\pi,\pi]$.*

Theorem D におけるスペクトル $\mathbf{\Lambda}$ は以下のように表される：

$$\lambda_n = \begin{cases} n - \dfrac{1}{2}, & n \in \mathbb{N} \backslash V, \\ n, & n < 0 \text{ または } n \in V. \end{cases} \tag{2.6}$$

つまり, (2.6) で与えられるスペクトルは, (2.5) で与えられたスペクトルの 1 部をずらして得られていることがわかる. 明らかに, $\mathbf{\Lambda} \in$SP であることに注意する. なお, Sedletskii は Theorem D において, 一般の $1 < p < \infty$ についての結果を求めているが, ここでは $p = 2$ に限定して考えることとする. これまでの例はいずれも SP 条件を満たしている. 次の節ではこの条件を満たさない, uniformly minimal でない minimal 複素指数関数系の例を構成する.

## 3. SP を持たない COMPLETE MINIMAL 複素指数関数系の例

前節で述べた Sedletskii の例は, SP を満たし, complete, minimal かつ uniformly minimal でない例であったのに対し, ここでは SP を満たさない同様な例を構成する. まず, 用いる定理を述べる.

**Theorem E ([Schwarz, 1959; see [11, p.117, Theorem 15]).**

*If $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}$ is a sequence of real numbers such that $\sum 1/|\lambda_n| < \infty$, then $\{e^{i\lambda_n t}\}$ fails to be complete in $L^2[-A, A]$ for any positive number $A$.*

**Theorem F ([5, Theorem 47]).**

*For $-\infty < n < \infty$, let $\mathbf{\Lambda} \equiv \{\lambda_n\}$ be a sequence of complex numbers satisfying $|\lambda_n - n| \le h$ where $h$ is a positive constant. Then $E(\mathbf{\Lambda})$ satisfies*

$$-\left(4h + \frac{1}{2}\right) < E(\mathbf{\Lambda}) \le 4h + \frac{1}{2}.$$

次に, $n(t)$ を $|z| \le t$ 内に含まれる $\lambda_n$ の個数を表すとし,

$$N(r) = \int_1^r \frac{n(t)}{t} dt$$

とする. このとき, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が complete となるための十分条件を与える Levinson の次の結果がある.

**Theorem G ([3, Theorem Ⅲ]; see [11, p.99, Theorem 3]).**

*The set $\{e^{i\lambda_n t}\}$ is complete in $L^2[-\pi, \pi]$ whenever*

$$\limsup_{r \to \infty} \left(N(r) - 2r + \frac{1}{2} \log r\right) > -\infty.$$

**Lemma 3.1.** 次のように, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_n\}$ を定義する：

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{2, 2+\frac{1}{2}, 2^2, 2^2+\frac{1}{2^2}, \ldots, 2^n, 2^n+\frac{1}{2^n}, \ldots\right\}.$$

このとき, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ は *minimal* であり, $\mathbf{\Lambda} \notin$SP である.

Theorem E を用いると, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ は incomplete であることがわかるので, Theorem A より, minimal となる. $\mathbf{\Lambda} \notin$SP は明らか.

最後に, Theorem F と Theorem G を用いて, 以下の結果を得る.

**Theorem 3.1.** Lemma 3.1 における $\{e^{i\lambda_n t}\}$ は, $L^2[-\pi,\pi]$ において *complete* かつ *minimal* 複素指数関数系 $\{e^{i\mu_n t}\}$ に拡張できる. さらに, $\boldsymbol{\mu} \notin$SP だから, $\{e^{i\mu_n t}\}$ は *uniformly minimal* でない.

証明の概略を述べる. $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_n\}$, $\mathbf{\Lambda} \subset \boldsymbol{\mu}$ を

$$|\mu_n - n| \le 1, \ \forall n$$

を満たすように選ぶ. $n_1(t)$ を $|z| \le t$ 内に含まれる整数の個数, $n_2(t)$ を $|z| \le t$ 内に含まれる $\mu_n$ の個数を表すものとし,

$$N_1(r) = \int_1^r \frac{n_1(t)}{t}dt, \quad N_2(r) = \int_1^r \frac{n_2(t)}{t}dt$$

とする. 明らかに, $N_1(r) \le N_2(r)$ だから, Theorem G より, $\{e^{i\mu_n t}\}$ は complete となるので, $0 \le E(\boldsymbol{\mu})$ となる. また, $\mu_n$ の構成から, Theorem F を用いると, $E(\boldsymbol{\mu}) \le 4$ となることがわかる. 従って, $\{e^{i\mu_n t}\}$ から, 高々4個の $\mu_n$ を除けば, complete かつ minimal となることがわかる.

## References


[1] W.O. Alexander and R.M. Redheffer, *The excess of sets of complex exponentials*, Duke Math. **34** (1967), 59-72.

[2] N. Fujii, A. Nakamura and R.M. Redheffer, *On the Excess of Sets of Complex Exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc.**127** (1999), 1815-1818.

[3] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, AMS Colloquium Publications **26**(1940).

[4] A. Nakamura, *Basis properties and complements of complex exponential systems*, Hokkaido Math. J. 36 (2007), 195-208.

[5] R.M. Redheffer, *Completeness of Sets of Complex Exponentials*, Adv. Math. **24** (1977), 1-62.

[6] R.M. Redheffer and R.M. Young, *Completeness and Basis Properties of Complex Exponentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 93-111.

[7] A.M. Sedletskii, *A Construction of Complete Minimal, But Not Uniformly Minimal, Exponential Systems with Real Separable Spectrum in $L^p$ and $C$*, Mathematical Notes, Vol. **58**, No. 4 (1995), 1084-1093.

[8] A.M. Sedletskii, *Nonharmonic Analysis*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. **116**, No. 5 (2003), 3551-3619.

[9] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1970.

[10] R.M. Young, *On the Stability of Exponential Bases in $L^2[-\pi,\pi]$*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 117-122.

[11] R.M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, revised first edition, Academic Press 2001.



Department of Mathematics, Tokai University, 316 Nishino, Numazu, Shizuoka, 410-0395, Japan

*E-mail address*: a-nakamu@wing.ncc.u-tokai.ac.jp